

# Parametrische Optimierung als Instrument zur Bewertung von Investitionsprojekten<sup>1</sup>

Von Christoph Schwindt<sup>2</sup> und Jürgen Zimmermann<sup>3</sup>

10. April 2002

<sup>1</sup>Erscheint in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft 72(6)

<sup>2</sup>Dr. Christoph Schwindt, Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Wirtschaftstheorie und Operations Research, Universität Karlsruhe, Kaiserstr. 12, 76128 Karlsruhe.

<sup>3</sup>Prof. Dr. Jürgen Zimmermann, Institut für Wirtschaftswissenschaft, Technische Universität Clausthal, Julius-Albert-Str. 2, 38678 Clausthal-Zellerfeld.

## Überblick:

- Bei Investitionsprojekten liegen die Zeitpunkte der entscheidungsrelevanten Ein- und Auszahlungen nicht fest, sondern sind Gegenstand der Planung. Ferner ist die maximale Projektdauer häufig nicht vorgegeben, sondern das Ergebnis von Verhandlungen.
- Zur Lösung des Annahme- bzw. Auswahlproblems von langfristigen Investitionen unter Sicherheit erfreut sich die Kapitalwertmethode besonders breiter Zustimmung, wobei in der Praxis der benötigte Kalkulationszinsfuß nicht exakt bestimmt, sondern nur geschätzt werden kann.
- Die Bewertung von Investitionsprojekten mit der Kapitalwertmethode entspricht somit der Lösung eines Optimierungsproblems mit den ungewissen Ausgangsdaten maximale Projektdauer und Kalkulationszinsfuß.
- Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Verfahrens der parametrischen Optimierung zur Bestimmung der funktionalen Abhängigkeit des optimalen Kapitalwerts eines Investitionsprojekts von der maximalen Projektdauer und vom Kalkulationszinsfuß.
- Es wird gezeigt, wie Investitionsprojekte mit Hilfe dieser Kapitalwertfunktion adäquat beurteilt werden können, ohne die Kenntnis des anzuwendenden Kalkulationszinsfußes vorauszusetzen.

## A. Einleitung

Langfristige Projekte wie beispielsweise Vorhaben im Hoch-, Tief-, Anlagen- oder Schiffsbau beanspruchen nicht nur Zeit und Ressourcen, sondern stellen häufig auch eine erhebliche Belastung der liquiden Mittel einer Unternehmung dar. Hierbei ist zu beachten, daß den laufenden Auszahlungen für Löhne, benötigte Materialien und fremdbezogene Dienstleistungen erst nach einiger Zeit Fortschrittszahlungen für abgeschlossene Teilprojekte gegenüberstehen. Die Durchführung eines solchen *Investitionsprojekts*<sup>1</sup> kann mithin als *Investition* und der Projektdurchführende als *Investor* angesehen werden.

Investitionsprojekte bestehen aus einer Menge zu planender Aktivitäten, deren Ausführung mit vorgegebenen Ein- bzw. Auszahlungen<sup>2</sup> verbunden ist. Da für die Ausführung der Aktivitäten meist zusätzliche Mitarbeiter und Materialien benötigt werden, lassen sich den einzelnen Aktivitäten nach dem Verursacherprinzip Auszahlungen zuordnen, die in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Investitionsprojekt stehen.<sup>3</sup> Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wollen wir annehmen, daß die mit der Ausführung einer Aktivität verbundene Auszahlung beim Start der Aktivität erfolgt. Ferner nehmen wir an, daß der Abschluß gewisser Teilprojekte oder gleichbedeutend das Erreichen vorgegebener Meilensteine eine festgelegte Einzahlung auslöst. Somit stimmen die Zeitpunkte der einzelnen Zahlungen mit den Eintrittszeitpunkten gewisser Projekt Ereignisse (Start von Aktivitäten oder Meilensteine, die das Ende von Teilprojekten repräsentieren) überein. Die Zeitpunkte der Zahlungen sind daher nicht im voraus festgelegt, sondern Gegenstand der Planung. Hierbei sind

in der Regel technisch bzw. organisatorisch bedingte Abhängigkeiten (Zeitbeziehungen) zwischen den Projekt ereignissen und eine Höchstdauer für das Investitionsprojekt zu berücksichtigen.

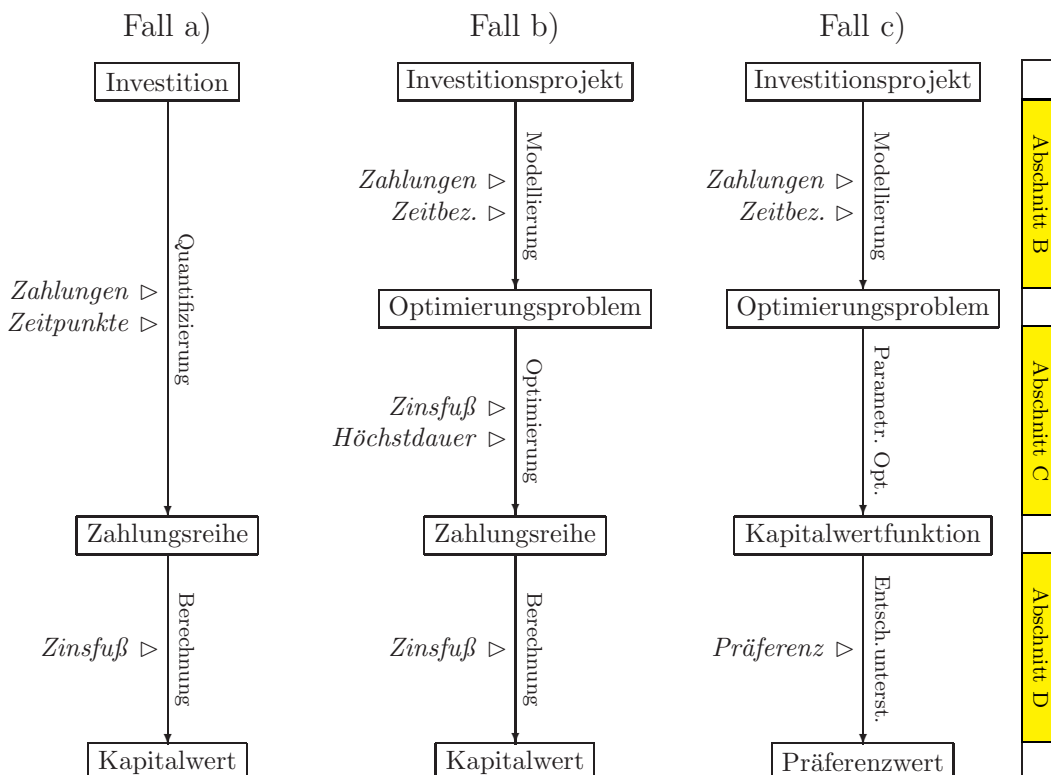
Wir gehen in dieser Arbeit davon aus, daß die betrachteten Investitionen nicht risikobehaftet sind, d. h. sowohl die Zahlungen als auch die Zeitbeziehungen deterministische Größen darstellen, die zum Zeitpunkt der Planung bekannt sind. Zur Bewertung von riskanten Investitionen anhand verschiedener risikoangepaßter Kalkulationszinsfüße verweisen wir auf Fischer (1999). Bei Investitionen unter Unsicherheit eröffnen sich zudem oft zukünftige Wahl- und Handlungsalternativen, die hier jedoch nicht Gegenstand der Betrachtung sein sollen. Gemäß ihrem Optionscharakter können solche Alternativen<sup>4</sup> mit Hilfe optionspreistheoretischer Verfahren bewertet werden. Eine umfassende Darstellung der Grundlagen der Optionspreistheorie und verschiedener Modelle zur Bewertung von Realloptionen sowie praktische Anwendungen der Optionspreistheorie finden sich bei Kilka (1995) und Trigeorgis (1996). Wie in Fischer et al. (1999) für den Fall der Unternehmensbewertung gezeigt wird, können Handlungsspielräume bei Verwendung zustandsspezifischer Sicherheitsäquivalente für die Zahlungen auf Grundlage der CAPM-Methode auch mittels der Kapitalwertmethode ökonomisch korrekt bewertet werden.

Wie in der Literatur zur klassischen Investitionsrechnung üblich, unterstellen wir im folgenden einen vollkommenen und unbeschränkten Kapitalmarkt.<sup>5</sup> Somit kann die Bewertung des zugrundeliegenden Investitionsprojekts unabhängig von der Art der Finanzierung des Investitionsprojekts erfolgen.<sup>6</sup> Für den Fall eines vollkommenen und unbeschränkten Kapitalmarkts bietet die klassische Investitionsrechnung verschiedene statische und dynamische Kriterien zur Bewertung von Einzelinvestitionen (*Annahmeproblem*) bzw. Kriterien zur Auswahl von Investitionen aus einem gegebenen Investitionsportfolio (*Auswahlproblem*).<sup>7,8</sup> Das in der Literatur nahezu einhellig empfohlene und in der Praxis am häufigsten angewandte Kriterium bei der Lösung des Annahme- bzw. Auswahlproblems ist der Kapitalwert der Investition. Das Kapitalwertkriterium ist unter der Annahme eines vollständigen Kapitalmarkts äquivalent zu den dynamischen Kriterien Endwert und Annuität.<sup>9</sup> Liegen, wie in der klassischen Investitionsrechnung unterstellt wird, die Zeitpunkte der Zahlungen fest, so kann der Kapitalwert einer Investition unmittelbar aus der zugrundeliegenden Zahlungsreihe berechnet werden (vgl. Fall a in Abbildung 1, in der die exogenen Parameter der Bewertungsverfahren kursiv gesetzt sind). Da diese Zeitpunkte bei Investitionsprojekten Gegenstand der Planung sind, ergibt sich die Zahlungsreihe und somit der (maximale) Kapitalwert aus der Lösung eines Optimierungsproblems, in das die Zahlungen und Zeitbeziehungen zwischen diesen Zahlungen eingehen (vgl. Fall b in Abbildung 1). Zur Lösung solcher Optimierungsprobleme wurden in den letzten Jahren effiziente Verfahren zur kapitalwertmaximierenden Terminierung der Projekt ereignisse bei vorgeschriebener Projekthöchstdauer und gegebenem Kalkulationszinsfuß entwickelt.<sup>10</sup> Dieser Planung kommt eine zentrale Rolle zu, entscheidet sie doch in der Regel über Annahme oder Ablehnung des Investitionsprojekts.

In der Praxis ist jedoch häufig weder die Projekthöchstdauer noch der anzuwendende Kalkulationszinsfuß bekannt. So führt bei Investitionsprojekten

der Investor das Projekt in der Regel im Auftrag eines Auftraggebers durch. Der Auftraggeber ist naturgemäß an einer möglichst frühen Fertigstellung des Projekts interessiert. Dahingegen verfolgt der Investor das Ziel, einen maximalen Vermögenszuwachs zu erreichen, wobei wir wie üblich davon ausgehen, daß er als Durchführender (unter Beachtung der Frist für das Projektende) den zeitlichen Projektablauf gestalten kann. Da der maximale Kapitalwert des Projekts (als Maß für den Vermögenszuwachs) von dem Zeitpunkt abhängt, zu dem das Projekt beendet sein muß, wird die Projekthöchstdauer zwischen Auftraggeber und Investor verhandelt. Hierzu benötigt der Investor Informationen über den Zusammenhang zwischen der Projekthöchstdauer und dem maximalen Kapitalwert des Investitionsprojekts. Ferner ist zu beachten, daß der bei der Bestimmung des Kapitalwerts benötigte Kalkulationszinsfuß eine theoretische Größe darstellt, die in der Praxis nur geschätzt werden kann.<sup>11</sup> Ziel dieser Arbeit ist es daher, für Investitionsprojekte ein Verfahren der parametrischen Optimierung zur Bestimmung der Abhängigkeit des maximalen Kapitalwerts von der Projekthöchstdauer und dem Kalkulationszinsfuß zu entwickeln.<sup>12</sup> Die resultierende Kapitalwertfunktion bildet dann die Grundlage zur Entscheidungsunterstützung des Investors bei der Lösung des Annahme- bzw. des Auswahlproblems (vgl. Fall c in Abbildung 1). Die Entscheidung des Investors wird hierbei maßgeblich von seiner individuellen Unsicherheitspräferenz hinsichtlich des anzuwendenden Kalkulationszinsfußes beeinflusst.

Abb. 1: Bewertung von Investitionen und Investitionsprojekten



Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. In Abschnitt B führen wir die mathematische Modellierung eines Investitionsprojekts ein. In Abschnitt C entwickeln wir einen Algorithmus zur Bestimmung der Kapitalwertfunktion in Abhängig-

keit von Projekthöchstdauer und Kalkulationszinsfuß. Hierzu beschreiben wir zunächst das Optimierungsproblem der Bestimmung des maximalen Kapitalwerts bei festgelegter Projekthöchstdauer und gegebenem Kalkulationszinsfuß und skizzieren ein Verfahren des steilsten Anstiegs zur Lösung dieses Optimierungsproblems. Dieses Verfahren wird dann zu einem parametrischen Optimierungsverfahren in den Parametern Projekthöchstdauer und Kalkulationszinsfuß verallgemeinert. Abschließend beschreiben wir in Abschnitt D, wie Investitionsprojekte auf Grundlage der Kapitalwertfunktion bewertet werden können.

## B. Projektdefinition

### I. Strukturanalyse

Die Modellierung eines Investitionsprojekts erfolgt mit Hilfe einer Struktur-, Zeit- und Kostenanalyse. Im Rahmen der *Strukturanalyse* (als Teil der Strukturplanung von Projekten<sup>13</sup>) werden zunächst die für das Projekt maßgeblichen Ereignisse definiert. Hierzu gehören der Projektbeginn, das Projektende, der Ausführungsbeginn von Aktivitäten und die Meilensteine von Teilprojekten. Die Menge aller Ereignisse, die fortlaufend mit  $0, 1, \dots, n + 1$  numeriert seien, nennen wir  $E$ . Ereignis 0 bezeichnet hierbei den Projektbeginn und Ereignis  $n + 1$  das Projektende. Neben der Definition der Projektereignisse umfaßt die Strukturanalyse die Ermittlung von technisch und organisatorisch bedingten Zeitbeziehungen zwischen den Ereignissen.

### II. Zeitanalyse

Im Rahmen der *Zeitanalyse* werden die in der Strukturanalyse ermittelten Zeitbeziehungen wie folgt quantifiziert. Sei  $S_e \geq 0$  der zu bestimmende Eintrittszeitpunkt von Ereignis  $e$  ( $e = 0, 1, \dots, n + 1$ ), wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß jedes Projekt zum Zeitpunkt 0 startet, d. h.  $S_0 = 0$  gilt und somit  $S_{n+1}$  gerade der Projektdauer entspricht. Existiert zwischen den Eintrittszeitpunkten zweier Ereignisse  $e, f \in E$  eine Zeitbeziehung, so kann diese einen Mindest- oder einen Höchstabstand zwischen den Eintrittszeitpunkten darstellen. Ein zeitlicher *Mindestabstand*  $d_{ef}^{min}$  besagt, daß Ereignis  $f$  frühestens  $d_{ef}^{min}$  Zeiteinheiten nach Ereignis  $e$  eintreten kann, d. h., es muß  $S_f - S_e \geq d_{ef}^{min}$  gelten. Ein zeitlicher *Höchstabstand*  $d_{ef}^{max}$  stellt sicher, daß das Ereignis  $f$  spätestens  $d_{ef}^{max}$  Zeiteinheiten nach dem Ereignis  $e$  eintritt, d. h.  $S_f - S_e \leq d_{ef}^{max}$  erfüllt ist.

Mit Hilfe zeitlicher Mindest- und Höchstabstände können verschiedene Restriktionen modelliert werden, beispielsweise

- das Festlegen des Eintrittszeitpunkts  $S_e$  eines Ereignisses  $e \in E$  auf einen Zeitpunkt  $t \geq 0$  durch die Einführung von  $d_{0e}^{min} := d_{0e}^{max} := t$ ,
- das gleichzeitige Eintreten zweier Ereignisse  $e$  und  $f$  durch die Einführung von  $d_{ef}^{min} := d_{ef}^{max} := 0$  oder

- die Beschränkung der Zeitspanne zwischen dem Eintreten des ersten und des letzten Ereignisses aus einer Menge  $E' \subseteq E$  auf  $\bar{d}$  Zeiteinheiten durch die Einführung zweier Ereignisse  $\alpha$  und  $\omega$  mit  $d_{\alpha e}^{min} := 0$  und  $d_{e\omega}^{min} := 0$  für alle  $e \in E'$  sowie  $d_{\alpha\omega}^{max} := \bar{d}$ .

Die Ereignisse eines Investitionsprojekts und die Zeitbeziehungen zwischen den Ereignissen lassen sich mit Hilfe eines Ereignis-Knoten-Netzplans (im folgenden als *Projektnetzplan* bezeichnet) visualisieren, wobei die Knoten den Ereignissen und die Pfeile den Zeitbeziehungen zwischen den Ereignissen entsprechen. Ein Mindestabstand  $d_{ef}^{min}$  entspricht einem Pfeil  $\langle e, f \rangle$  von Knoten  $e$  zu Knoten  $f$  mit Bewertung  $\delta_{ef} = d_{ef}^{min}$ . Ein Höchstabstand  $d_{ef}^{max}$  entspricht einem Pfeil  $\langle f, e \rangle$  von Knoten  $f$  zu Knoten  $e$  mit Bewertung  $\delta_{fe} = -d_{ef}^{max}$ . Für jede Aktivität  $v$  der Dauer  $p_v$  mit Startereignis  $e$ , die zum Teilprojekt  $P$  mit zugehörigem Meilenstein  $f$  gehört, existiert im Projektnetzplan somit ein Pfeil  $\langle e, f \rangle$  mit Bewertung  $\delta_{ef} \geq p_v$ . Durch diese Pfeile wird sichergestellt, daß Meilenstein  $f$  frühestens nach Beendigung aller Aktivitäten  $v \in P$  eintreten kann.

### III. Kostenanalyse

Zur Durchführung von Aktivitäten werden in der Regel Mitarbeiter, Betriebsmittel und Materialien benötigt. Daher ordnen wir im Rahmen der *Kostenanalyse* jedem Startereignis  $e$  die mit der Ausführung der entsprechenden Aktivität  $v$  (beispielsweise durch Überstunden, erhöhten Verschleiß oder Verbrauch von Roh-, Hilfs- und Betriebsstoffen) zusätzlich verursachte negative Zahlung  $c_e < 0$  zu. Die Höhe  $-c_e$  der mit  $v$  assoziierten Auszahlung läßt sich mit Hilfe von Aufwandsabschätzungen bestimmen oder kann von bereits durchgeführten Projekten übernommen werden (vgl. Spickhoff, 1966, Buttler, 1979 und Elmaghraby, 1990). Den von Aktivitäten verursachten Auszahlungen stehen durch das Erreichen von Meilensteinen  $f$  (Fertigstellung von Teilprojekten) ausgelöste Einzahlungen  $c_f > 0$  gegenüber. Fortschrittszahlungen für das Erreichen zuvor vertraglich festgelegter Meilensteine sind sowohl in der Bauwirtschaft als auch im Schiffs- oder Anlagenbau anzutreffen.

Wie in Elmaghraby (1990) und Daynand und Padman (1997) beschrieben, steht die Fortschrittszahlung bei Erreichen eines Meilensteins meist in direktem Bezug zu den Auszahlungen des Teilprojekts. Sei  $c^P < 0$  die Summe der Teilprojekt  $P$  zuzurechnenden negativen Zahlungen und  $f$  der zu  $P$  gehörende Meilenstein. Dann setzen wir für die Fortschrittszahlung

$$(1) \quad c_f := -\gamma^P c^P$$

Hierbei gibt der Faktor  $\gamma^P$  das innerhalb gewisser Bandbreiten frei wählbare Verhältnis zwischen den Einzahlungen und den Auszahlungen für Teilprojekt  $P$  an. Falls  $\gamma^P > 1$  ist, so kann der Investor mit der Ausführung von Teilprojekt  $P$  einen Einnahmeüberschuß erzielen.  $\gamma^P < 1$  impliziert, daß ein Teil der Einzahlungen auf die Abschlußzahlung verschoben wird, damit der Auftraggeber einen Gegenwert für die Beseitigung von Mängeln in der Hand hat. Bei Immobilienprojekten sind vom Gesetzgeber in der Makler- und Bauträgerverordnung für die Fortschrittszahlungen einzelner Teilprojekte  $P$  prozentuale

Höchstgrenzen in Bezug auf die vertraglich festgelegte Gesamtsumme (und somit auch Höchstgrenzen für die Faktoren  $\gamma^P$ ) vorgegeben.<sup>14</sup> In der Praxis ist es hier üblich, daß einer Einzahlung am Projektende von ca. fünf Prozent der Gesamtsumme die Außenarbeiten, ein Teil des Innenausbaus sowie die Behebung bei der Begehung festgestellter Mängel gegenüberstehen. Diese Arbeiten werden dann häufig erst kurz vor Ablauf der vertraglich vereinbarten Projekthöchstdauer ausgeführt, da der Bauträger als Investor durch das Hinausschieben dieser Arbeiten Auszahlungen verzögern kann.

Falls einzelne Aktivitäten  $v$  des Teilprojekts (bzw. deren Startereignisse  $e$ ) zu mehreren Teilprojekten gehören, so ist bei der Bestimmung der Fortschrittszahlung  $c_f$  zu klären, wie die Auszahlungen  $-c_e$  den zugehörigen Teilprojekten zuzurechnen sind. Die Aufteilung der Auszahlungen soll dabei proportional zu den Gesamtauszahlungen der entsprechenden Teilprojekte erfolgen. Sei  $E^P$  die Menge der Startereignisse  $e$  von Aktivitäten  $v$ , die Teilprojekt  $P$  zugeordnet werden, und  $x_{eP}$  der zu bestimmende Anteil, der von Auszahlung  $-c_e$  auf Teilprojekt  $P$  entfällt. Dann ergibt sich für Teilprojekt  $P$  die Summe der  $P$  zuzurechnenden negativen Zahlungen zu

$$(2) \quad c^P = \sum_{e \in E^P} c_e x_{eP}$$

wobei sich die Werte  $x_{eP}$  durch das Lösen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems bestimmen lassen. Ist  $\Pi_e$  die Menge der Teilprojekte  $P$ , zu denen Ereignis  $e$  gehört, so gilt  $\sum_{Q \in \Pi_e} x_{eQ} = 1$ . Ferner erhalten wir für jedes Ereignis  $e \in E$  und für alle entsprechenden Teilprojekte  $P \in \Pi_e$  eine Gleichung der Form

$$(3) \quad x_{eP} = \frac{c^P}{\sum_{Q \in \Pi_e} c^Q} = \frac{\sum_{g \in E^P} c_g x_{gP}}{\sum_{Q \in \Pi_e} \sum_{g \in E^Q} c_g x_{gQ}}$$

oder gleichbedeutend (nach Einsetzen von  $\sum_{Q \in \Pi_e} x_{eQ} = 1$ )

$$(4) \quad x_{eP} = \frac{\sum_{g \in E^P \setminus \{e\}} c_g x_{gP}}{\sum_{Q \in \Pi_e} \sum_{g \in E^Q \setminus \{e\}} c_g x_{gQ}}$$

Sei  $\bar{c}^P := \sum_{e \in E^P} c_e \geq c^P$  die Summe der negativen (Gesamt-)Zahlungen von Teilprojekt  $P$ . Das durch (4) spezifizierte Gleichungssystem kann dann mit Hilfe eines Fixpunktverfahrens ausgehend von den Startwerten

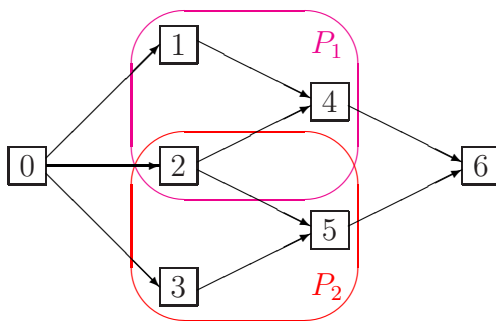
$$(5) \quad x_{eP}^0 := \frac{\bar{c}^P}{\sum_{Q \in \Pi_e} \bar{c}^Q}$$

durch iteratives Einsetzen in (4) gelöst werden. Aus der Anwendbarkeit des Banachschen Fixpunktsatzes ergibt sich unmittelbar, daß das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt, die auf diese Art und Weise bestimmt werden kann.<sup>15</sup>

## IV. Beispielhafte Anwendung

Zur Veranschaulichung der Struktur-, Zeit- und Kostenanalyse betrachten wir das folgende Beispiel. Ein Bauvorhaben bestehe aus zwei parallel ausführbaren Teilprojekten  $P_1$  und  $P_2$ , denen die Aktivitäten  $u$  und  $v$  bzw.  $v$  und  $w$  zugeordnet werden. Die zugehörigen Startereignisse seien mit 1, 2 und 3 bezeichnet. Für den Abschluß der beiden Teilprojekte führen wir die Meilensteine 4 und 5 ein. Die Menge der Ereignisse ist somit  $E = \{0, 1, \dots, 5, 6\}$ . Da Aktivitäten frühestens zum Projektbeginn gestartet werden können, ergeben sich Zeitbeziehungen zwischen dem Projektbeginn und allen Startereignissen von Aktivitäten. Ferner erhalten wir für jede Aktivität Zeitbeziehungen zwischen ihrem Startereignis und allen Meilensteinen von Teilprojekten, zu denen sie gehört. Da das Projektende frühestens bei Beendigung des letzten Teilprojekts eintreten kann, existiert zwischen jedem Meilenstein und dem Projektende eine Zeitbeziehung. Abbildung 2 zeigt für das Beispiel als Ergebnis der Strukturanalyse den zugehörigen Graphen der Zeitbeziehungen zwischen den Projekttereignissen, wobei jeder Pfeil eine Zeitbeziehung zwischen seinem Anfangs- und seinem Endknoten repräsentiert.

Abb. 2: Graph der Zeitbeziehungen



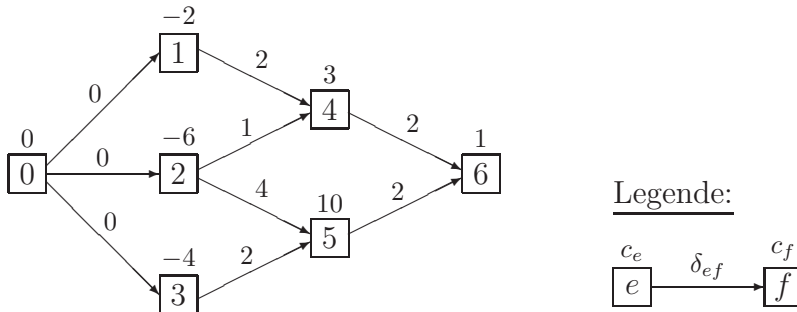
Im Rahmen der Zeitanalyse werden für die Aktivitäten  $u$ ,  $v$  und  $w$  die Dauern  $p_u = 2$ ,  $p_v = 1$  und  $p_w = 2$  ermittelt.  $u$ ,  $v$  und  $w$  können jeweils zum Projektbeginn gestartet werden. Nach dem Ende der Aktivität  $v$  schließt sich im Teilprojekt  $P_2$  eine Wartezeit von drei Zeiteinheiten bis zum Erreichen des Meilensteins 5 an. Das Bauvorhaben kann zwei Zeiteinheiten nach dem Abschluß der beiden Teilprojekte beendet werden.

Die Kostenanalyse ordnet den Startereignissen 1, 2 und 3 zusätzlich verursachte Auszahlungen in Höhe von zwei, sechs bzw. vier Geldeinheiten zu. Teilprojekt  $P_1$  soll zahlungsneutral durchgeführt werden, wobei 25 Prozent der Einzahlungen aus Teilprojekt  $P_1$  auf die Abschlußzahlung am Projektende verlegt werden, d. h.,  $\gamma^{P_1} = 0,75$ . Für Teilprojekt  $P_2$  wird eine Rendite von 25 Prozent angesetzt, d. h.,  $\gamma^{P_2} = 1,25$ . Für die Anteile  $x_{2,P_1}$  und  $x_{2,P_2}$ , die von der Zahlung  $c_2 = -6$  auf die Teilprojekte  $P_1$  bzw.  $P_2$  entfallen, erhalten wir  $x_{2,P_1} = -2/-6 = 1/3$  und  $x_{2,P_2} = -4/-6 = 2/3$ . Somit gilt für die den beiden Teilprojekten zuzurechnenden negativen Zahlungen  $c^{P_1} = -2 - 6/3 = -4$  und  $c^{P_2} = -4 - 12/3 = -8$  und für die Fortschrittszahlungen  $c_4 = -0,75 \cdot (-4) = 3$ ,  $c_5 = -1,25 \cdot (-8) = 10$  sowie  $c_6 = -0,25 \cdot (-4) = 1$ . Abbildung 3 zeigt den sich aus der Struktur-, Zeit- und Kostenanalyse ergebenden Projektnetzplan,



wobei die Ereignisse  $e \in E$  mit den zugehörigen Zahlungen  $c_e$  beschriftet sind.

Abb. 3: Projektnetzplan mit Zahlungen



## C. Bestimmung der Kapitalwertfunktion

Nach der Modellierung des Investitionsprojekts beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt mit der kapitalwertmaximierenden Terminierung der Zahlungen. Hierbei untersuchen wir den Zusammenhang zwischen dem sich hieraus ergebenden maximalen Kapitalwert des Investitionsprojekts und den bei der Optimierung zugrundegelegten Ausgangsdaten Projekthöchstdauer und Kalkulationszinsfuß.

### I. Ermittlung des maximalen Kapitalwerts

#### 1. Problemstellung

Wir untersuchen zunächst, wie bei vorgeschriebener Projekthöchstdauer  $\bar{d}$  und gegebenem Kalkulationszinsfuß  $i$  unter Beachtung der Zeitbeziehungen die Ereignisse so terminiert werden können, daß der Kapitalwert der zugehörigen Zahlungsreihe maximal ist. Einen Vektor von Eintrittszeitpunkten  $S = (S_0, S_1, \dots, S_n, S_{n+1})$  der Projekt Ereignisse wollen wir im folgenden als *Ablaufplan* bezeichnen. Ein Ablaufplan, der sowohl allen Zeitbeziehungen als auch der Projekthöchstdauer genügt, heißt zulässiger Ablaufplan. Ein optimaler Ablaufplan ist ein zulässiger Ablaufplan mit maximalem Kapitalwert. Wie in Neumann et al. (2000) gezeigt, existiert für den Fall ganzzahliger Zeitabstände stets ein komponentenweise ganzzahliger optimaler Ablaufplan. Nehmen wir ferner an, daß das Gutschriftsintervall (Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zinszahlungen) gerade einer Zeiteinheit entspricht, so ergibt sich der Kapitalwert des Investitionsprojekts für einen Ablaufplan  $S$  zu

$$(6) \quad C_0(S) = \sum_{e \in E} c_e (1 + i)^{-S_e}$$

(vgl. van der Boom und van der Grift, 1999). Das „Net-Present-Value-Problem“ NPVP der Bestimmung eines optimalen Ablaufplans für ein Investitionsprojekt mit Ereignismenge  $E$  und Menge von Zeitbeziehungen  $A$  (Pfeilmenge des Projektnetzplans) lautet bei festgelegter Projekthöchstdauer  $\bar{d}$  und gegebenem Kalkulationszinsfuß  $i$  somit:

$$\left. \begin{array}{ll}
 (7) & \text{Maximiere } C_0(S) = \sum_{e \in E} c_e (1+i)^{-S_e} \\
 (8) & \text{u.d.N. } S_f - S_e \geq \delta_{ef} \text{ für alle } \langle e, f \rangle \in A \\
 (9) & S_0 = 0 \\
 (10) & S_{n+1} \leq \bar{d}
 \end{array} \right\} \text{ (NPVP)}$$

Die Zielfunktion (7) stellt die Summe der auf den Projektbeginn abgezinsten Zahlungen dar. Die Nebenbedingungen (8) stellen sicher, daß die vorgegebenen Zeitbeziehungen zwischen den Projektereignissen eingehalten werden. Die Nebenbedingungen (9) und (10) gewährleisten, daß das Projekt zum Zeitpunkt 0 startet und zum Zeitpunkt  $\bar{d}$  beendet ist. Zur Vereinfachung der Darstellung gehen wir im folgenden davon aus, daß die Nebenbedingung (10) durch einen Höchstabstand  $d_{0,n+1}^{max} = \bar{d}$  modelliert wird. In den Projektnetzplan fügen wir folglich einen Pfeil von  $n+1$  nach 0 mit Bewertung  $\delta_{n+1,0} = -\bar{d}$  ein. NPVP besitzt genau dann eine zulässige Lösung, wenn der zugrundeliegende Projektnetzplan keinen Zyklus positiver Länge enthält. Im folgenden nehmen wir stets an, NPVP besitze eine zulässige Lösung.

## 2. Verfahren des steilsten Anstiegs

Zur Lösung von NPVP sind in der Literatur eine Reihe von Verfahren vorgeschlagen worden. Eine ausführliche Übersicht findet man in Herroelen et al. (1997) sowie Kolisch und Padman (2001). Der gegenwärtig leistungsfähigste Algorithmus zur Lösung von NPVP von Schwindt und Zimmermann (2001) soll im folgenden kurz dargestellt werden.<sup>16</sup> Der Algorithmus gehört zu der Klasse der Verfahren des steilsten Anstiegs.<sup>17</sup> In einem solchen Verfahren steigt man im Graphen der Zielfunktion ausgehend von einer zulässigen Lösung schrittweise zu einer optimalen Lösung auf. In jeder Iteration wird hierbei eine bezüglich der Nebenbedingungen (8) bis (10) zulässige Richtung  $z$  berechnet, entlang der sich der Zielfunktionswert  $C_0(S)$  maximal vergrößert, und danach eine Schrittweite  $\sigma$  bestimmt, um die man sich in Richtung  $z$  bewegt.

Zur Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung berechnen wir in einem Initialisierungsschritt zunächst für jedes Ereignis  $e \in E$  den frühesten Eintrittszeitpunkt  $ES_e$  und einen dem zugehörigen Ablaufplan  $ES$  entsprechenden *spannenden Wald*  $G$  des Projektnetzplans (der in diesem Fall gerade einem Spannbaum oder *Gerüst* des Projektnetzplans entspricht). Die Pfeilmenge  $A_G$  von  $G$  enthält hierbei nur Pfeile  $\langle e, f \rangle$ , die zu bindenden Zeitbeziehungen gehören, d. h., für die  $S_f - S_e = \delta_{ef}$  gilt. Danach berechnen wir in jeder Iteration des Algorithmus eine Menge von Ereignissen, deren marginale Verzögerung unter Beachtung der Mindest- und Höchstabstände ausgehend vom aktuellen Ablaufplan  $S$  die maximale Erhöhung des Projektkapitalwerts  $C_0(S)$  bewirkt. Mit anderen Worten, wir bestimmen eine steilste zulässige Anstiegsrichtung  $z = (z_0, z_1, \dots, z_n, z_{n+1})$ , die sich als optimale Lösung des folgenden „Steepest-Ascent-Direction-Problems“ SADP ergibt.

$$\left. \begin{array}{ll}
 (11) & \text{Maximiere } \sum_{e \in E} \partial C_0(S) / \partial S_e \cdot z_e \\
 (12) & \text{u.d.N. } z_f \geq z_e \text{ für alle } \langle e, f \rangle \in A_G \\
 (13) & z_0 = 0 \\
 (14) & -1 \leq z_e \leq 1 \text{ für alle } e \in V
 \end{array} \right\} \text{ (SADP)}$$

Hierbei bezeichnet  $\partial C_0(S)/\partial S_e = -\ln(1+i) c_e(1+i)^{-S_e}$  die partielle Ableitung von  $C_0$  nach der Variablen  $S_e$  an der Stelle  $S$ . Die zu maximierende Zielfunktion entspricht der Ableitung von  $C_0$  in Richtung  $z$  als Maß für die Veränderung des Kapitalwerts beim Übergang von Ablaufplan  $S$  zu einem Ablaufplan  $S+\sigma z$  mit  $\sigma > 0$ . Die Nebenbedingungen (12) und (13) gewährleisten, daß für hinreichend kleine Schrittweite  $\sigma$  der Ablaufplan  $S + \sigma z$  zulässig ist, d. h.  $z$  eine zulässige Richtung darstellt. Nebenbedingung (14) normiert den (Maximums-) Betrag  $|z| = \max_{e \in E} |z_e|$  des Richtungsvektors  $z$  auf den Wert eins. SADP entspricht einem linearen Programm mit total unimodularer Koeffizientenmatrix, das in  $n$  Schritten gelöst werden kann (vgl. Schwindt und Zimmermann, 2001). Ferner kann gezeigt werden, daß für eine optimale Lösung  $z$  von SADP stets  $z_e \geq 0$  und somit  $z_e \in \{0, 1\}$  für alle  $e \in E$  gilt. Da der Kapitalwert bei Bewegung in solche „binäre“ Richtungen monoton fallend oder monoton wachsend ist, ergibt sich für die optimale Schrittweite  $\sigma$  mit maximalem Kapitalwert  $C_0(S + \sigma z)$

$$(15) \quad \sigma = \min\{S_f - S_e - \delta_{ef} \mid \langle e, f \rangle \in A, z_e = 1 \text{ und } z_f = 0\}$$

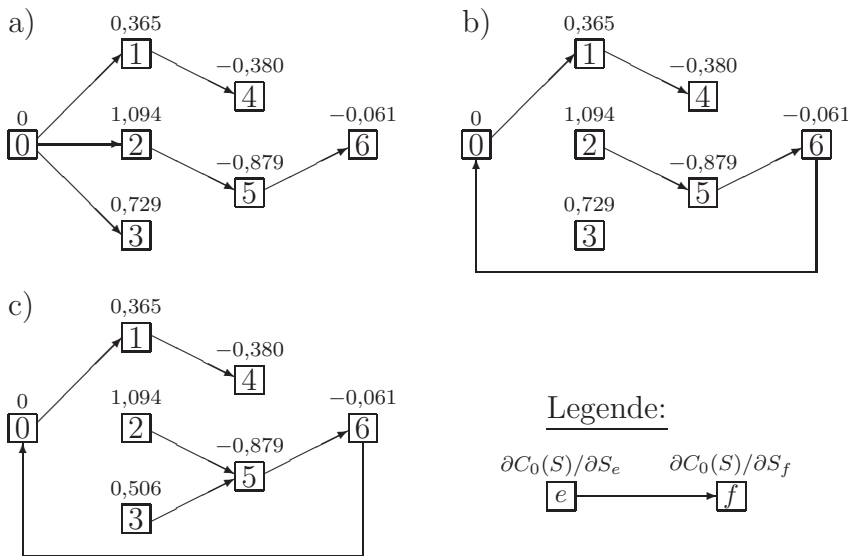
Dies bedeutet, daß man sich von  $S$  aus solange in Richtung  $z$  bewegt, bis ein neuer Pfeil  $\langle e, f \rangle$  in den spannenden Wald  $G$  der bindenden Nebenbedingungen aufgenommen werden muß. Gleichzeitig werden alle Pfeile  $\langle g, h \rangle \in A_G$  zwischen (nicht verzögerten) Ereignissen  $g$  mit  $z_g = 0$  und (verzögerten) Ereignissen  $h$  mit  $z_h = 1$  aus  $G$  entfernt.

Das Verfahren terminiert, falls für  $S$  keine zulässige Anstiegsrichtung mehr existiert, d. h.  $S$  ein lokales Optimum darstellt. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $z = 0$  eine optimale Lösung von SADP ist. In Schwindt und Zimmermann (2001) wird gezeigt, daß jedes lokale Optimum von NPVP gleichzeitig ein globales Optimum ist und  $S$  mithin einen optimalen Ablaufplan darstellt.

### 3. Beispielhafte Anwendung

Für das Projekt aus Abschnitt B wollen wir nun einen optimalen Ablaufplan  $S$  bestimmen. Das Projekt soll hierbei frühestmöglich abgeschlossen werden, d. h., die maximale Projektdauer beträgt  $\bar{d} = ES_6 = 6$  Zeiteinheiten. Für den Zinsfuß setzen wir  $i = 0,2$  an. Der Vektor der frühesten Eintrittszeitpunkte der Ereignisse ergibt sich zu  $ES = (0, 0, 0, 0, 2, 4, 6)$ . Abbildung 4a zeigt für den Ablaufplan  $S = ES$  das zugehörige Gerüst  $G$  bindender Zeitbeziehungen, wobei die Ereignisse  $e$  mit den jeweiligen partiellen Ableitungen  $\partial C_0(S)/\partial S_e$  beschriftet sind. Als steilste Anstiegsrichtung erhalten wir den Vektor  $z = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$ , d. h., die Ereignisse 2, 3, 5 und 6 sollen verzögert werden. Für die Schrittweite gilt  $\sigma = S_0 - S_6 - \delta_{60} = 0 - 6 + 6 = 0$ , so daß der Ablaufplan  $S$  unverändert bleibt. Im Gerüst  $G$  entfernen wir die Pfeile  $\langle 0, 2 \rangle$  und  $\langle 0, 3 \rangle$  und fügen einen Pfeil zwischen dem Projektende 6 und dem Projektbeginn 0 ein. In Abbildung 4b ist der neue spannende Wald  $G$  abgebildet. Als Lösung des Problems SADP erhalten wir nun  $z = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ , so daß nur Ereignis 3 verzögert wird, und zwar um  $\sigma = S_5 - S_3 - \delta_{35} = 4 - 0 - 2 = 2$  Zeiteinheiten. In den spannenden Wald  $G$  wird demzufolge der Pfeil  $\langle 3, 5 \rangle$  eingefügt (vgl. Abbildung 4c). Da sich im nächsten Schritt als Lösung von SADP  $z = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  ergibt, ist der zugehörige Ablaufplan  $S = (0, 0, 0, 2, 2, 4, 6)$  optimal.

Abb. 4: Spannende Wälder



## II. Parametrische Optimierung

### 1. Problemstellung

Bislang sind wir davon ausgegangen, daß sowohl die Projekthöchstdauer  $\bar{d}$  als auch der Kalkulationszins  $i$  exogene Problemgrößen sind. Wie bereits erwähnt, wird die Projekthöchstdauer in der Praxis jedoch meist zwischen dem Auftraggeber und dem Investor ausgehandelt. Hierbei sind die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden. Sieht der Vertrag eine Abschlußzahlung zum Projektende vor und wird ferner eine maximale Projektdauer  $\bar{d}$  festgeschrieben, so ist die tatsächliche Projektdauer  $S_{n+1}$  unter der Nebenbedingung  $S_{n+1} \leq \bar{d}$  Gegenstand der Planung. Es ist offensichtlich, daß in diesem Fall aus Sicht des Investors ein möglichst großer Wert für die maximale Projektdauer  $\bar{d}$  ausgehandelt werden sollte. Wird hingegen eine Abschlußzahlung zum Zeitpunkt  $\bar{d}$  vereinbart, so wird es aus Sicht des Investors häufig günstig sein,  $\bar{d}$  möglichst klein zu wählen. In diesem Fall dauert das Projekt immer  $\bar{d}$  Zeiteinheiten unabhängig vom gewählten Ablaufplan, d. h., es gilt  $S_{n+1} = \bar{d}$ . Dies kann durch die Einführung eines Mindestabstands  $d_{0,n+1}^{min} = \bar{d}$  modelliert werden, der zusammen mit dem Höchstabstand  $d_{0,n+1}^{max} = \bar{d}$  sicherstellt, daß das Projekt genau zum Zeitpunkt  $\bar{d}$  endet.

Wie in Abschnitt A bereits erwähnt wurde, ergibt sich bei Anwendung des Kapitalwertkriteriums das Problem, den anzuwendenden Kalkulationszinsfuß zu bestimmen. Da dieser nur geschätzt werden kann, ist in der Literatur vorgeschlagen worden, den Kapitalwert nicht für einen bestimmten Kalkulationszinsfuß, sondern für einen ganzen Bereich zu berechnen, in dem der korrekte Kalkulationszinsfuß voraussichtlich liegt.<sup>18</sup>

Daher wollen wir im folgenden den Algorithmus aus Abschnitt I.2 zu einem Verfahren der parametrischen Optimierung erweitern, mit dessen Hilfe sich der maximale Kapitalwert eines Investitionsprojekts als Funktion der Projekthöchstdauer  $\bar{d}$  und des Kalkulationszinsfußes  $i$  darstellen läßt.

## 2. Resultate

Den maximalen Kapitalwert des Investitionsprojekts für gegebenen Kalkulationszinsfuß  $i$  und vorgeschriebene Projekthöchstdauer  $\bar{d}$ , d. h. den optimalen Zielfunktionswert des Problems NPVP, wollen wir mit  $C_0^*(i, \bar{d})$  bezeichnen. Grundlegend für die nachfolgenden Überlegungen zur Ermittlung der Funktion  $C_0^*$  ist, daß stets eine optimale Lösung  $S$  für NPVP existiert, die einer *Ecke* des zulässigen Bereichs (d. h. der durch die Nebenbedingungen (8) bis (10) beschriebenen Menge von Ablaufplänen) entspricht. Jede Ecke  $S$  wiederum läßt sich einem Gerüst  $G$  des Projektnetzplans mit Pfeilmenge  $A_G$  zuordnen. Für jeden Pfeil  $\langle e, f \rangle \in A_G$  gilt hierbei  $S_f - S_e = \delta_{ef}$ .

Sei  $E_{ef}$  die Knotenmenge des Teilgerüsts, das aus  $G$  durch Entfernen des Pfeils  $\langle e, f \rangle$  entsteht und den Knoten 0 nicht enthält. Mit

$$(16) \quad C_0^{ef}(S) := \sum_{g \in E_{ef}} c_g (1+i)^{-S_g}$$

bezeichnen wir den Kapitalwert des Teilprojekts mit den Ereignissen  $g \in E_{ef}$  für gegebenen Ablaufplan  $S$ .

**Resultat 1** *Bei positivem Kalkulationszinsfuß  $i$  ist eine Ecke  $S$  genau dann ein optimaler Ablaufplan, wenn für jeden Pfeil  $\langle e, f \rangle \in A_G$  des zugehörigen Gerüsts  $G$  gilt:  $C_0^{ef}(S) \geq 0$ , falls  $\langle e, f \rangle$  auf dem Weg von 0 nach  $f$  in Wegrichtung orientiert ist und  $C_0^{ef}(S) \leq 0$ , falls  $\langle e, f \rangle$  auf dem Weg von 0 nach  $e$  entgegen der Wegrichtung orientiert ist.*

Anschaulich bedeutet diese notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingung, daß kein Teilprojekt mit positivem Kapitalwert vorverlegt und kein Teilprojekt mit negativem Kapitalwert verzögert werden kann.

Die zweite Beobachtung, die wir uns zunutze machen werden, ist

**Resultat 2** *Bei Variation der maximalen Projektdauer  $\bar{d}$  und festgehaltenem Zinsfuß  $i$  bleibt das Gerüst  $G$  zum optimalen Schedule  $S$  unverändert, bis eine zeitliche Nebenbedingung  $S_f - S_e \geq \delta_{ef}$  mit  $\langle e, f \rangle \notin A_G$  bindend wird, d. h.  $S_f - S_e = \delta_{ef}$  gilt.*

Die Menge  $E^v \subset E$  der Ereignisse, die bei Veränderung von  $\bar{d}$  verschoben werden, entspricht hierbei gerade der Menge  $E_{n+1,0}$ , falls das Projektende planungsabhängig ist, und  $E_{n+1,0}$  bzw.  $E_{0,n+1}$ , falls das Projekt zum Zeitpunkt  $\bar{d}$  mit einer Abschlußzahlung enden muß (in diesem Fall wird das Projektende  $n+1$  aufgrund der Nebenbedingung  $S_{n+1} = \bar{d}$  verzögert, und wir gehen ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon aus, daß sich entweder der Pfeil  $\langle 0, n+1 \rangle$  oder der Pfeil  $\langle n+1, 0 \rangle$  im Gerüst  $G$  befindet). Wir erhalten somit innerhalb eines gewissen *Gültigkeitsbereichs* für  $i$  und  $\bar{d}$ , in dem sich das zugrundeliegende Gerüst  $G$  nicht verändert, die folgende Darstellung für  $C_0^*$ :

$$(17) \quad C_0^*(i, \bar{d}) = \sum_{e \in E \setminus E^v} c_e (1+i)^{-S_e} + \sum_{e \in E^v} c_e (1+i)^{-(S_e + \bar{d} - S_{n+1})}$$

Sowohl die Menge  $E^v$  als auch der Ablaufplan  $S$  lassen sich hierbei aus dem zugehörigen Gerüst  $G$  bestimmen ( $E^v$  wie oben beschrieben und  $S$  durch die

Lösung des Gleichungssystems  $S_f - S_e = \delta_{ef}$  mit  $\langle e, f \rangle \in A_G$ ). Der Betrag  $\sigma^+(G)$ , um den  $\bar{d}$  erhöht werden kann, bis eine Nebenbedingung bindend wird, beträgt in Analogie zu (15)

$$(18) \quad \sigma^+(G) = \min\{S_f - S_e - \delta_{ef} \mid \langle e, f \rangle \in A \setminus \{\langle n+1, 0 \rangle\}, e \in E^v, f \notin E^v\}$$

Entsprechend gilt für den Betrag  $\sigma^-(G)$ , um den  $\bar{d}$  verringert werden kann, bis eine Nebenbedingung bindend wird

$$(19) \quad \sigma^-(G) = \min\{S_f - S_e - \delta_{ef} \mid \langle e, f \rangle \in A \setminus \{\langle 0, n+1 \rangle\}, e \notin E^v, f \in E^v\}$$

Das Gerüst  $G'$  zu einem optimalen Ablaufplan  $S'$  für  $\bar{d}' = \bar{d} + \sigma^+(G)$  bzw.  $\bar{d}' = \bar{d} - \sigma^-(G)$  kann konstruiert werden, indem man zunächst in  $G$  den Pfeil  $\langle e, f \rangle$  zur neuen bindenden Nebenbedingung einfügt und anschließend aus dem resultierenden Kreis einen entgegen  $\langle e, f \rangle$  orientierten Pfeil  $\langle g, h \rangle$  mit betragsmäßig kleinstem Kapitalwert  $C_0^{gh}(S')$  entfernt.

Die dritte nützliche Eigenschaft unserer Problemstellung ist

**Resultat 3** *Bei Variation des Zinsfußes  $i$  und festgehaltener Projekthöchstdauer  $\bar{d}$  bleibt das Gerüst  $G$  zum optimalen Schedule  $S$  unverändert, bis für eine Menge  $E_{ef}$  mit  $\langle e, f \rangle \in A_G$  der Kapitalwert  $C_0^{ef}(S)$  das Vorzeichen wechselt.*

Seien mit  $i_{ef}^1 < i_{ef}^2 < \dots < i_{ef}^\nu$  alle Zinssätze  $i_{ef} > i$  bezeichnet, für die

$$(20) \quad \sum_{g \in E_{ef}} c_g (1 + i_{ef})^{-S_g} = 0$$

gilt. Jeder Zinsfuß  $i_{ef}$  entspricht gerade einem internen Zinsfuß der durch die Zahlungen  $c_g$  mit  $g \in E_{ef}$  und den Ablaufplan  $S$  gegebenen Zahlungsreihe und kann somit mit einem der bekannten Verfahren zur Bestimmung interner Zinsfüße von Zahlungsreihen bestimmt werden.<sup>19</sup> Mit

$$(21) \quad \Delta i := \min\{i_{ef}^1 - i, i_{ef}^2 - i_{ef}^1, \dots, i_{ef}^\nu - i_{ef}^{\nu-1}\}$$

erhalten wir als notwendige und hinreichende Bedingung für einen Vorzeichenwechsel an der (Null-)Stelle  $i_{ef}$ , daß  $C_0^{ef}(S)$  für die Zinssätze  $i_{ef} - \Delta i/2$  und  $i_{ef} + \Delta i/2$  verschiedene Vorzeichen besitzen, d. h.

$$(22) \quad \text{sign} \sum_{g \in E_{ef}} c_g (1 + i_{ef} - \frac{\Delta i}{2})^{-S_g} \neq \text{sign} \sum_{g \in E_{ef}} c_g (1 + i_{ef} + \frac{\Delta i}{2})^{-S_g}$$

gilt. Für jede Menge  $E_{ef}$  bestimmen wir den kleinsten Zinsfuß  $i_{ef} > i$ , für den (20) und (22) erfüllt sind. Sei  $i' := \min_{\langle e, f \rangle \in A_G} i_{ef}$  der kleinste dieser internen Zinsfüße, wobei wir  $i' := \infty$  setzen, falls kein interner Zinsfuß  $i_{ef} > i$  existiert. Da bei Veränderung der maximalen Projektdauer  $\bar{d}$  die Beziehungen zwischen den Eintrittszeitpunkten der Ereignisse  $g \in E_{ef}$  unverändert bleiben, ist  $i'$  nur vom Gerüst  $G$  (und nicht von  $\bar{d}$ ) abhängig. Der zu  $i' < \infty$  gehörende optimale Ablaufplan  $S'$  ergibt sich durch die Verzögerung der Ereignisse aus der Menge  $E_{ef}$  um  $\sigma^+(G)$ , falls  $\langle e, f \rangle$  auf dem Weg von 0 nach  $f$  in Wegrichtung orientiert ist, und andernfalls durch die Vorverlegung der Ereignisse aus der Menge  $E_{ef}$  um  $\sigma^-(G)$ . Das zugehörige Gerüst  $G'$  kann analog zum Fall der Variation von  $\bar{d}$  bestimmt werden.

### 3. Verfahren

Aus den bisherigen Ausführungen folgt, daß die Gültigkeitsbereiche von Gerüsten  $G$  Rechtecken  $[i, i'] \times [\bar{d}, \bar{d}']$  entsprechen, wobei  $i'$  und  $\bar{d}'$  wie oben beschrieben berechnet werden können. Insbesondere ist die Funktion  $C_0^*$  stetig und bis auf die Übergänge zwischen angrenzenden Gültigkeitsbereichen überall ableitbar. Für die Bestimmung der Kapitalwertfunktion  $C_0^*$  bleibt nun noch zu klären, wie die Definitionsmenge  $[0, \infty[ \times [ES_{n+1}, \infty[$  von  $C_0^*$  systematisch mit Gültigkeitsbereichen überdeckt werden kann. Die grundsätzliche Vorgehensweise besteht darin, startend beim Gerüst  $G^0$  zu „beliebig kleinem“ Zinsfuß  $i > 0$  und  $\bar{d} = ES_{n+1}$  die maximale Projektdauer  $\bar{d}$  für festes  $i$  schrittweise um die aktuelle Schrittweite  $\sigma^+(G')$  zu erhöhen, bis  $\sigma^+(G') = \infty$  gilt. Für jedes zugehörige Zwischengerüst  $G'$  (einschließlich  $G$  selbst) speichern wir das zugehörige Tripel  $(i, \bar{d}, G')$ , berechnen den minimalen Zinsfuß  $i' > i$ , für den (20) und (22) gelten, und konstruieren wie oben beschrieben aus  $G'$  das zu  $i'$  und  $\bar{d}'$  gehörige Gerüst  $G''$ . Sei nun  $i^*$  der kleinste der berechneten Zinsfüße  $i' > i$  mit zugehörigem Zwischengerüst  $G^*$  und maximaler Projektdauer  $\bar{d}^*$  (gehört  $i^*$  zu mehreren Zwischengerüsten  $G'$ , so wählen wir unter diesen das Gerüst zur kleinsten maximalen Projektdauer  $\bar{d}'$ ). Falls  $i^* = \infty$  gilt, beenden wir das Verfahren, da der Definitionsbereich von  $C_0^*$  vollständig überdeckt ist. Ansonsten wird sodann  $i$  durch  $i^*$ ,  $\bar{d}$  durch  $\bar{d}^*$  und  $G$  durch  $G^*$  ersetzt und die Berechnung solange fortgeführt, bis für den aktuellen Zinsfuß  $i$  kein Zwischengerüst  $G'$  mehr mit einem internen Zinsfuß  $i' > i$  existiert.

Das Anfangsgerüst  $G^0$  kann mit dem in Abschnitt I.2 beschriebenen Verfahren des steilsten Anstiegs bestimmt werden, indem wir für  $i$  einen hinreichend kleinen Zinsfuß  $i^{\min}$  wählen mit der Eigenschaft, daß für  $G^0$  und alle weiteren Zwischengerüste  $G'$  die Optimalitätsbedingungen für alle  $0 < i' < i^{\min}$  erfüllt sind. Hierzu schätzen wir  $i^{\min}$  so ab, daß für keinen Pfeil  $\langle e, f \rangle \in A_{G'}$  ein Zinsfuß  $0 < i_{ef} \leq i^{\min}$  existieren kann, der (20) erfüllt. Wir bemerken zunächst, daß

$$(23) \quad \bar{d}^{\max} := \sum_{\langle e, f \rangle \in A} |\delta_{ef}|$$

eine obere Schranke für die zu den Gerüsten  $G'$  gehörenden maximalen Projektdauern  $\bar{d}'$  darstellt. Den kleinsten Zinsfuß  $i_{ef} > 0$ , für den (20) gilt, erhalten wir, falls  $E_{ef}$  in eine Menge  $E'$  und eine Menge  $E''$  zerlegt werden kann, für die  $0 > c^{E'} := \sum_{e \in E'} c_e = -\sum_{e \in E''} c_e + 1$  und  $S_f = S_e + \bar{d}^{\max}$  für alle  $e \in E'$  und alle  $f \in E''$  gilt. Aus (20) folgt dann die Beziehung  $i_{ef} = [(-c^{E'} + 1)/(-c^{E'})]^{1/\bar{d}^{\max}} - 1$ . Da  $(-c^{E'} + 1)/(-c^{E'})$  umso kleiner ist, je kleiner  $c^{E'}$  ist, können wir  $c^{E'}$  durch  $\sum_{e \in E'} \min(0, c_e)$  abschätzen und erhalten somit für den zu wählenden ersten Zinsfuß

$$(24) \quad i^{\min} = \left( \frac{\sum_{e \in E} \min(0, c_e) - 1}{\sum_{e \in E} \min(0, c_e)} \right)^{1/\bar{d}^{\max}} - 1$$

Abbildung 5 zeigt eine rechentechnisch günstige Umsetzung des obigen Algorithmus, wobei  $L$  eine nach nichtfallenden Zinssätzen  $i$  (bei gleichen Zinssätzen nach wachsenden maximalen Projektdauern  $\bar{d}$ ) sortierte Liste von Tripeln  $(i, \bar{d}, G)$  bezeichne. Die Tripel  $(i, \bar{d}, G)$  geben hierbei mit  $(i, \bar{d})$  die linke

untere Ecke des Gültigkeitsbereichs an, für den die Funktion  $C_0^*$  die durch  $G$  spezifizierte Gestalt (17) besitzt.

Abb. 5: Algorithmus zur Bestimmung der Funktion  $C_0^*$

Berechne Gerüst  $G^0$  und initialisiere Liste  $L := \{(0, ES_{n+1}, G^0)\}$ .

Solange  $L$  nicht leer ist

Entferne erstes Element  $(i, \bar{d}, G)$  und alle weiteren Elemente  $(i, \cdot, G)$  aus  $L$ .

Erhöhe für festes  $i$  schrittweise die maximale Projektdauer  $\bar{d}$ , bis  $\sigma^+(G') = \infty$  gilt.

Für alle Zwischengerüste  $G'$  und zugehörige maximale Projektdauern  $\bar{d}'$

Falls sich noch kein Tripel  $(\cdot, \bar{d}', G')$  in  $L$  befindet

Speichere  $(i, \bar{d}', G')$ .

Bestimme  $i' := \min\{i_{ef} \mid \langle e, f \rangle \in A_{G'}, i_{ef} \text{ erfüllt (20) und (22)}\}$ .

Falls  $i' < \infty$

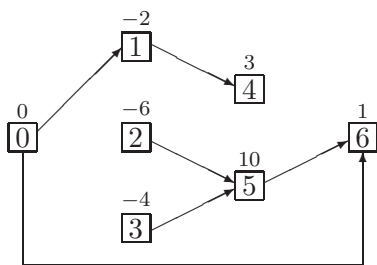
Konstruiere das zu  $i'$  und  $\bar{d}'$  gehörige Gerüst  $G''$ .

Füge  $(i', \bar{d}', G'')$  in  $L$  ein.

#### 4. Beispielhafte Anwendung

Im folgenden wollen wir für das Projekt aus Abschnitt B die Kapitalwertfunktion  $C_0^*$  für den Fall der Abschlußzahlung zum Zeitpunkt  $\bar{d}$  (d. h.  $S_{n+1} = \bar{d}$ ) bestimmen. Wir erhalten  $\bar{d}^{max} = 13$ ,  $\sum_{e \in E} \min(0, c_e) = -12$ ,  $i^{min} = (13/12)^{1/13} - 1 = 0,006176$  und  $ES_{n+1} = 6$ . Abbildung 6 zeigt das zugehörige erste Gerüst  $G^0$ , das für  $i = i^{min}$  und  $\bar{d} = ES_{n+1}$  mit dem Verfahren des steilsten Anstiegs berechnet werden kann. Der zugehörige Ablaufplan ist  $S = (0, 0, 0, 2, 2, 4, 6)$ . Es gilt  $E^v = E_{06} = \{2, 3, 5, 6\}$ , und wir erhalten  $\sigma^+(G^0) = S_4 - S_2 - \delta_{24} = 2 - 0 - 1 = 1$ , d. h., die Ereignisse 2, 3, 5 und 6 werden um eine Zeiteinheit verzögert. Der resultierende Ablaufplan ist  $S' = (0, 0, 1, 3, 2, 5, 7)$ . Nach Einfügen des Pfeils  $\langle 2, 4 \rangle$  entsteht der Kreis  $[0, 1, 4, 2, 5, 6, 0]$ , und es gilt  $C_0^{01}(S') = 0,963284$ ,  $C_0^{14}(S') = 2,963284$ ,  $C_0^{25}(S') = -5,963171$  sowie  $C_0^{56}(S') = -0,193125$ . Demnach entfernen wir den Pfeil  $\langle 5, 6 \rangle$  aus  $G$  und erhalten das Gerüst  $G' = G^1$  aus Abbildung 7. Für  $G^1$  gilt  $E^v = E_{06} = \{6\}$  und  $\sigma^+(G^1) = \infty$ , da  $\langle 6, 0 \rangle$  der einzige Pfeil zwischen verzögerten und nicht verzögerten Ereignissen ist. Für die beiden Zwischengerüste  $G^0$  und  $G^1$  speichern wir die jeweiligen Tripel  $(0, 6, G^0)$  bzw.  $(0, 7, G^1)$ .

Abb. 6: Gerüst  $G^0$ :  $i = 0$ ,  $\bar{d} = 6$



$$S = (0, 0, 0, 2, 2, 4, 6)$$

$$E_{01} = \{1, 4\}: i_{01} = 0,22475$$

$$E_{25} = \{2\}$$

$$E_{35} = \{3\}$$

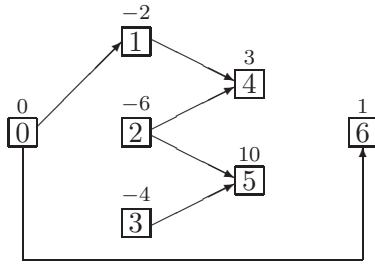
$$E_{14} = \{4\}$$

$$E_{56} = \{2, 3, 5\}$$

$$E_{06} = \{2, 3, 5, 6\}: i_{06} = 0,028508$$

Um die Gültigkeitsbereiche der beiden Gerüste zu berechnen, bestimmen wir für jeden Pfeil  $\langle e, f \rangle \in A_{G^0}$  und Ablaufplan  $S = (0, 0, 0, 2, 2, 4, 6)$  bzw. für



Abb. 7: Gerüst  $G^1$ :  $i = 0$ ,  $\bar{d} = 7$ 


$$S = (0, 0, 1, 3, 2, 5, 7)$$

$$E_{01} = \{1, \dots, 5\}: i_{01} = \mathbf{0,028975}$$

$$E_{24} = \{2, 3, 5\}$$

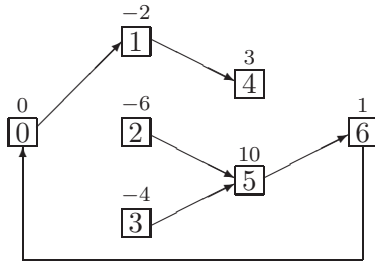
$$E_{35} = \{3\}$$

$$E_{14} = \{2, \dots, 5\}: i_{14} = 0,112152$$

$$E_{25} = \{3, 5\}: i_{25} = 0,581138$$

$$E_{06} = \{6\}$$

jeden Pfeil  $\langle e, f \rangle \in A_{G^1}$  und Ablaufplan  $S' = (0, 0, 1, 3, 2, 5, 7)$  den kleinsten Zinsfuß  $i_{ef} > i$ , für den (20) und (22) gelten. Die jeweiligen Zinssätze  $i_{ef}$  sind in den Abbildungen 6 und 7 angegeben. Als kleinsten Zinsfuß erhalten wir für  $G^0$  den Wert  $i' = i_{06} = 0,028508$  und für  $G^1$  den Wert  $i' = i_{01} = 0,028975$ . Das zum Zinsfuß  $i' = 0,028508$  und zur maximalen Projektdauer  $\bar{d} = 6$  gehörende Gerüst  $G^2$  konstruieren wir, indem wir in  $G^0$  den Pfeil  $\langle 0, 6 \rangle$  entfernen und durch  $\langle 6, 0 \rangle$  ersetzen (vgl. Abbildung 8). Für  $i' = 0,028975$  und  $\bar{d} = 7$  erhalten wir ausgehend von  $G^1$  das Gerüst  $G^3$  aus Abbildung 9. Die entsprechenden Tripel  $(0,028508, 6, G^2)$  und  $(0,028975, 7, G^3)$  werden in die Liste  $L$  aufgenommen.

 Abb. 8: Gerüst  $G^2$ :  $i = 0,028508$ ,  $\bar{d} = 6$ 


$$S = (0, 0, 0, 2, 2, 4, 6)$$

$$E_{01} = \{1, 4\}: i_{01} = \mathbf{0,22475}$$

$$E_{25} = \{2\}$$

$$E_{35} = \{3\}$$

$$E_{14} = \{4\}$$

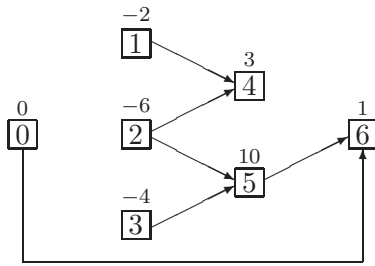
$$E_{56} = \{2, 3, 5\}$$

$$E_{60} = \{2, 3, 5, 6\}$$

In der nächsten Iteration entfernen wir als erstes Element der Liste  $L$  das Tripel  $(0,028508, 6, G^2)$ . Es gilt  $E^v = E_{60} = \{2, 3, 5, 6\}$  und  $\sigma^+(G^2) = S_4 - S_2 - \delta_{24} = 2 - 0 - 1 = 1$ . Das aus der Verzögerung der Ereignisse 2, 3, 5 und 6 um eine Zeiteinheit resultierende Gerüst  $G'$  entspricht dem Gerüst  $G^3$ , das sich bereits in der Liste  $L$  befindet. Wir speichern das Tripel  $(0,028508, 6, G^2)$  und bestimmen für alle Pfeile  $\langle e, f \rangle \in A_{G^2}$  die zugehörigen Zinssätze  $i_{ef}$  (vgl. Abbildung 8). Wir erhalten  $i' = i_{01} = 0,22475$ , bestimmen das zugehörige Gerüst  $G'' = G^5$  aus Abbildung 11 und nehmen das Tripel  $(0,22475, 6, G^5)$  in  $L$  auf.

Als nächstes Tripel wird  $(0,028975, 7, G^3)$  aus  $L$  entfernt, und wir erhalten  $E^v = E_{06} = \{1, \dots, 6\}$  sowie  $\sigma^+(G^3) = \infty$ .  $(0,028975, 7, G^3)$  wird gespeichert, und für alle Pfeile  $\langle e, f \rangle \in A_{G^3}$  werden die Zinssätze  $i_{ef}$  berechnet (vgl. Abbildung 9). Für das zu  $i' = i_{06} = 0,053083$  gehörige Gerüst  $G''$  erhalten wir das Gerüst  $G^4$  aus Abbildung 10. Das Tripel  $(0,053083, 7, G^4)$  wird in die Liste  $L$  aufgenommen.

In der nächsten Iteration wird dieses Tripel als erstes Element von  $L$  wie-

Abb. 9: Gerüst  $G^3$ :  $i = 0,028975, \bar{d} = 7$ 


$$S = (0, 0, 1, 2, 2, 5, 7)$$

$$E_{14} = \{1\}$$

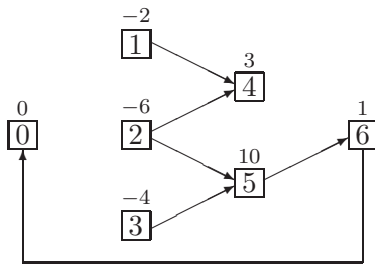
$$E_{25} = \{1, 2, 4\}$$

$$E_{35} = \{3\}$$

$$E_{24} = \{1, 4\}: i_{24} = 0,22475$$

$$E_{56} = \{1, \dots, 5\}$$

$$E_{06} = \{1, \dots, 6\}: i_{06} = \mathbf{0,053083}$$

 Abb. 10: Gerüst  $G^4$ :  $i = 0,053083, \bar{d} = 7$ 


$$S = (0, 0, 1, 2, 2, 5, 7)$$

$$E_{14} = \{1\}$$

$$E_{25} = \{1, 2, 4\}$$

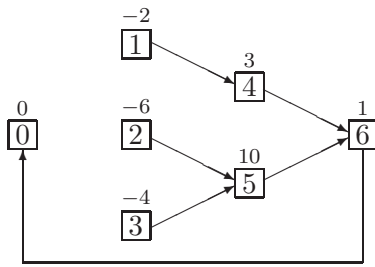
$$E_{35} = \{3\}$$

$$E_{24} = \{1, 4\}: i_{24} = \mathbf{0,22475}$$

$$E_{56} = \{1, \dots, 5\}$$

$$E_{60} = \{1, \dots, 6\}$$

der entfernt. Es gilt  $E^v = E_{60} = \{1, \dots, 6\}$  und  $\sigma^+(G^4) = \infty$ . Wir speichern  $(0,053083, 7, G^4)$ , bestimmen den Zinsfuß  $i' = i_{24} = 0,22475$  sowie das zugehörige Gerüst  $G'' = G^5$  und nehmen das Tripel  $(0,22475, 7, G^5)$  in  $L$  auf.

 Abb. 11: Gerüst  $G^5$ :  $i = 0,22475, \bar{d} = 6$ 


$$S = (0, 2, 0, 2, 4, 4, 6)$$

$$E_{14} = \{1\}$$

$$E_{25} = \{2\}$$

$$E_{35} = \{3\}$$

$$E_{46} = \{1, 4\}$$

$$E_{56} = \{2, 3, 5\}$$

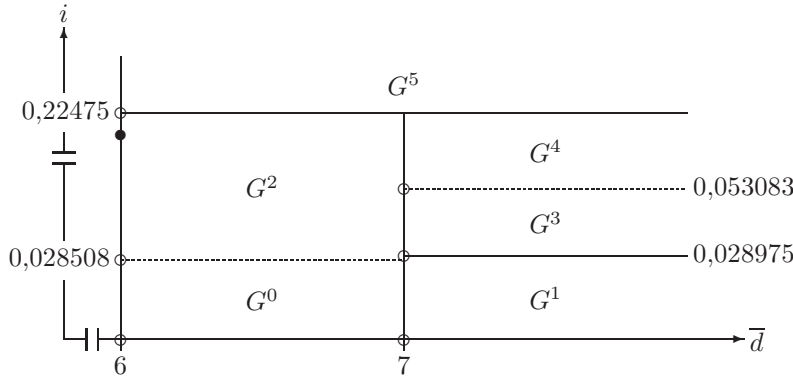
$$E_{60} = \{1, \dots, 6\}$$

In der letzten Iteration wird als erstes Tripel  $(0,22475, 6, G^5)$  und als weiteres Tripel  $(0,22475, 7, G^5)$  mit gleichem Zinsfuß  $i$  und gleichem Gerüst  $G$  aus der Liste  $L$  entfernt. Für  $G^5$  gilt  $E^v = E_{60} = \{1, \dots, 6\}$  und  $\sigma^+(G^5) = \infty$ . Wir speichern  $(0,22475, 6, G^5)$  und bestimmen Zinsfuß  $i'$ . Wegen  $i' = \infty$  wird kein neues Tripel in  $L$  aufgenommen. Da  $L$  nunmehr leer ist, bricht das Verfahren ab, und wir haben die in Abbildung 12 dargestellte Zerlegung des Definitionsbereichs von  $C_0^*$  erhalten. Die in Abschnitt I.3 betrachtete Kombination  $i = 0,2$  und  $\bar{d} = 6$  ist hierbei schwarz markiert. Das zugehörige Gerüst  $G^2$  entspricht dem in Abbildung 4c gezeigten Gerüst am Ende des Verfahrens des steilsten Anstiegs.

Für die Gerüste  $G^0$  und  $G^2$  sowie  $G^3$  und  $G^4$  ist hierbei die Gestalt von  $C_0^*$  identisch, da die Schnittstelle zwischen den zugehörigen Gültigkeitsbereichen von den Zinssätzen  $i' = i_{06}$  bestimmt wird. In diesem Fall unterscheiden sich

die jeweiligen Gerüste lediglich in der Orientierung des Pfeils zwischen Projektbeginn 0 und Projektende  $n + 1$ , die keinen Einfluß auf die Darstellung (17) der Kapitalwertfunktion besitzt, sondern lediglich einen Wechsel in der Art der Monotonie von  $C_0^*(i, \cdot)$  bewirkt (im vorliegenden Fall von monoton fallend nach monoton wachsend).

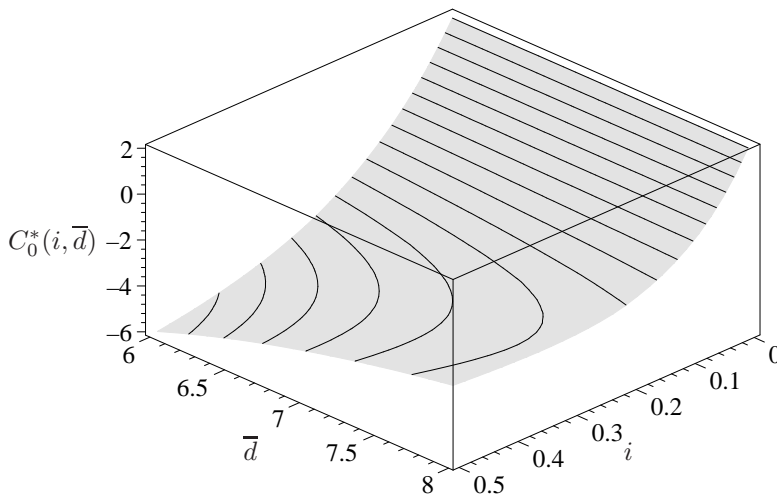
Abb. 12: Abschnittsweise Definition von  $C_0^*$



$$\begin{aligned}
 G^0: C_0^*(i, \bar{d}) &= -2 + 3(1+i)^{-2} - 6(1+i)^{6-\bar{d}} - 4(1+i)^{4-\bar{d}} + 10(1+i)^{2-\bar{d}} + (1+i)^{-\bar{d}} \\
 G^1: C_0^*(i, \bar{d}) &= -2 - 6(1+i)^{-1} + 3(1+i)^{-2} - 4(1+i)^{-3} + 10(1+i)^{-5} + (1+i)^{-\bar{d}} \\
 G^2: C_0^*(i, \bar{d}) &= -2 + 3(1+i)^{-2} - 6(1+i)^{6-\bar{d}} - 4(1+i)^{4-\bar{d}} + 10(1+i)^{2-\bar{d}} + (1+i)^{-\bar{d}} \\
 G^3: C_0^*(i, \bar{d}) &= -2(1+i)^{7-\bar{d}} - 6(1+i)^{6-\bar{d}} + 3(1+i)^{5-\bar{d}} - 4(1+i)^{4-\bar{d}} + 10(1+i)^{2-\bar{d}} + (1+i)^{-\bar{d}} \\
 G^4: C_0^*(i, \bar{d}) &= -2(1+i)^{7-\bar{d}} - 6(1+i)^{6-\bar{d}} + 3(1+i)^{5-\bar{d}} - 4(1+i)^{4-\bar{d}} + 10(1+i)^{2-\bar{d}} + (1+i)^{-\bar{d}} \\
 G^5: C_0^*(i, \bar{d}) &= -6(1+i)^{6-\bar{d}} - 6(1+i)^{4-\bar{d}} + 13(1+i)^{2-\bar{d}} + (1+i)^{-\bar{d}}
 \end{aligned}$$

Abbildung 13 zeigt den Graphen (mit Höhenlinien) der Funktion  $C_0^*$  über der Teilmenge  $[0, 0,5] \times [6, 8]$  ihres Definitionsbereichs. Die Abbildung bestätigt unsere weiter oben gemachte Feststellung, daß  $C_0^*$  stetig ist.

Abb. 13: Graph der Kapitalwertfunktion  $C_0^*$  mit Höhenlinien



## D. Lösung des Annahme- und des Auswahlproblems

Im folgenden untersuchen wir das (Projekt-)Auswahlproblem des Investors. Der Fall des (Projekt-)Annahmeproblems kann analog behandelt werden. Sei  $\mathcal{P} = \{P^1, \dots, P^\nu\}$  das (endliche) Portfolio von Investitionsprojekten. Für jedes Projekt  $P^\mu$  ( $\mu = 1, \dots, \nu$ ) stellt sich zunächst das Problem, welche maximale Projektdauer  $\bar{d} \in \{\bar{d}^0, \dots, \bar{d}^1\}$  mit dem Auftraggeber ausgehandelt werden sollte, falls sich der anzuwendende Kalkulationszinsfuß  $i$  (aller Voraussicht nach) im Intervall  $[i^0, i^1]$  befindet. In einem zweiten Schritt muß dann ein bestes Projekt zur Durchführung ausgewählt werden.

### I. Kapitalwertfunktion als Entscheidungshilfe

Bei beiden Teilproblemen handelt es sich um Entscheidungsprobleme unter Ungewißheit, bei denen eine Menge von Handlungsalternativen  $\mathcal{A}$  (auszuhandelnde maximale Projektdauern bzw. auszuwählende Investitionsprojekte) und eine Menge von Umweltzuständen  $\mathcal{S}$  (anzuwendende Kalkulationszinssätze) gegeben sind. Für jede Alternative  $a \in \mathcal{A}$  ist hierbei bekannt, zu welchem Ertrag  $u(a, s)$  sie bei Eintreten der einzelnen Umweltzustände  $s \in \mathcal{S}$  führen wird. Gesucht ist eine Handlungsalternative, die hinsichtlich einer gegebenen Entscheidungsregel  $\rho$  optimal ist. Eine bekannte Entscheidungsregel ist die Hurwicz-Regel, gemäß der diejenige Alternative  $a \in \mathcal{A}$  zu wählen ist, für die der Präferenzwert

$$(25) \quad \rho(a) = \lambda \max_{s \in \mathcal{S}} u(a, s) + (1 - \lambda) \min_{s \in \mathcal{S}} u(a, s)$$

maximal ist, wobei  $\lambda \in [0, 1]$  den Optimismusparameter bezeichnet.<sup>20</sup>  $\lambda$  reflektiert die Einstellung des Investors zur Ungewißheit, welcher Umweltzustand  $s \in \mathcal{S}$  eintreten wird.<sup>21</sup>

Sei mit  ${}^\mu C_0^*$  die zu Projekt  $P^\mu \in \mathcal{P}$  gehörende Kapitalwertfunktion bezeichnet. Bei Anwendung der Hurwicz-Regel für die Wahl der maximalen Dauer  $\bar{d}$  für Projekt  $P^\mu$  ist das Problem

$$(26) \quad \begin{cases} \text{Maximiere} & \rho(\bar{d}) = \lambda \max_{i^0 \leq i \leq i^1} {}^\mu C_0^*(i, \bar{d}) + (1 - \lambda) \min_{i^0 \leq i \leq i^1} {}^\mu C_0^*(i, \bar{d}) \\ \text{u.d.N.} & \bar{d} \in \{\bar{d}^0, \dots, \bar{d}^1\} \end{cases}$$

zu lösen. Für den Fall eines planungsabhängigen Projektendes (Nebenbedingung  $S_{n+1} \leq \bar{d}$ ) ist  $C_0^*$  monoton wachsend in  $\bar{d}$ . Somit stellt die Wahl von  $\bar{d} = \bar{d}^1$  stets eine optimale Entscheidung dar. Für den Fall einer Abschlußzahlung zum Zeitpunkt  $\bar{d}$  (Nebenbedingung  $S_{n+1} = \bar{d}$ ) besitzt  $C_0^*$  nur noch die (schwächere) Eigenschaft der Quasikonkavität in  $\bar{d}$ . Zur Bestimmung der optimalen maximalen Projektdauer berechnen wir in diesem Fall für alle  $\bar{d} \in \{\bar{d}^0, \dots, \bar{d}^1\}$  jeweils die Werte  $\max_{i^0 \leq i \leq i^1} {}^\mu C_0^*(i, \bar{d})$  und  $\min_{i^0 \leq i \leq i^1} {}^\mu C_0^*(i, \bar{d})$ .<sup>22</sup>

Sei mit  $\bar{d}^\mu$  die optimale maximale Projektdauer  $\bar{d}$  für Projekt  $P^\mu$  bezeichnet. Im zweiten Schritt ist nun zur Lösung des Auswahlproblems das beste Projekt

$P^\mu$  aus dem Portfolio  $\mathcal{P}$  zu wählen, d. h., das Problem

$$(27) \quad \begin{cases} \text{Maximiere} & \rho(P^\mu) = \lambda \max_{i^0 \leq i \leq i^1} {}^\mu C_0^*(i, \bar{d}^\mu) + (1 - \lambda) \min_{i^0 \leq i \leq i^1} {}^\mu C_0^*(i, \bar{d}^\mu) \\ \text{u.d.N.} & P^\mu \in \mathcal{P} \end{cases}$$

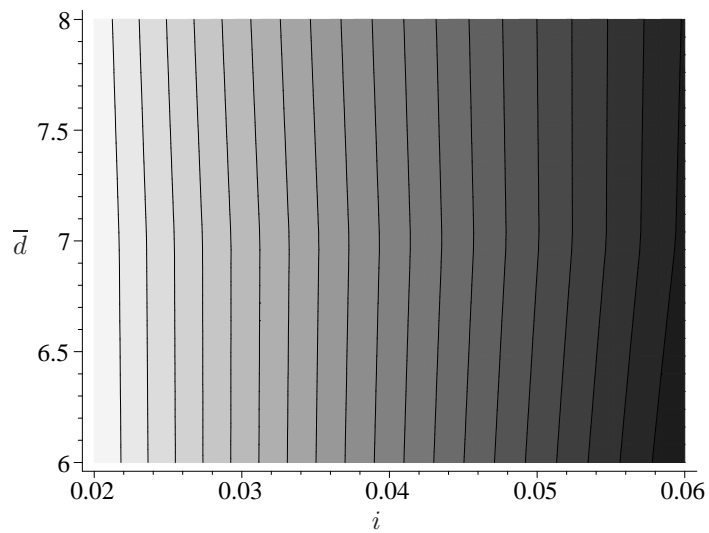
muß gelöst werden. Dies entspricht gerade der Auswahl desjenigen Projekts  $P^\mu \in \mathcal{P}$ , für das die Hurwicz-Regel bei der Wahl von  $\bar{d}$  die beste Bewertung  $\rho(\bar{d}^\mu)$  geliefert hat, d. h. sich bei der Lösung von Problem (26) der größte Zielfunktionswert ergeben hat. Liegt ein Annahmeproblem vor, so wird das untersuchte Projekt  $P^\mu$  genau dann durchgeführt, wenn  $\rho(\bar{d}^\mu) > 0$  gilt, d. h. der Investor auf Grundlage seiner individuellen Einstellung zur Ungewißheit von einem positiven optimalen Kapitalwert ausgeht.

In der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre bei Ungewißheit werden neben der Hurwicz-Regel eine Reihe weiterer Entscheidungsregeln diskutiert, die hier auf Grundlage der Kapitalwertfunktion  $C_0^*$  angewandt werden können (Savage-Niehans-Regel, Laplace-Regel, Krelle-Prinzip). Bei Verwendung der Savage-Niehans-Regel kann zur Bestimmung der Opportunitätskosten  $o(a, s) = \max_{a' \in \mathcal{A}} u(a', s) - a(a, s) = \max_{\bar{d}' = \bar{d}^0, \dots, \bar{d}^1} C_0^*(i, \bar{d}') - C_0^*(i, \bar{d})$  die Quasikonkavität der Kapitalwertfunktion  $C_0^*$  in  $\bar{d}$  ausgenutzt werden (es gilt für alle Zinssätze  $i$  die Eigenschaft  $\arg \max_{\bar{d}' = \bar{d}^0, \dots, \bar{d}^1} C_0^*(i, \bar{d}') \in \{\bar{d}^0, \bar{d}^1\}$ , und der Maximierer  $\bar{d}^0$  bzw.  $\bar{d}^1$  bleibt in festem Gültigkeitsbereich unverändert). Werden die Laplace-Regel oder das Krelle-Prinzip angewandt, so können für jeden Gültigkeitsbereich die Integrale  $\rho(a) = \int_{\mathcal{S}} u(a, s) ds = \int_{i^0}^{i^1} C_0^*(i, \bar{d}) di$  bzw.  $\rho(a) = \int_{\mathcal{S}} \omega(u(a, s)) ds = \int_{i^0}^{i^1} \omega(C_0^*(i, \bar{d})) di$  analytisch berechnet werden, wobei  $\omega$  die monoton wachsende Unsicherheitspräferenz-Funktion bezeichnet.<sup>23</sup>

## II. Beispielhafte Anwendung

Die Wahl der maximalen Projektdauer  $\bar{d}$  soll nachfolgend an dem Beispiel aus Abschnitt B veranschaulicht werden. Der Investor legt für das Intervall möglicher Kalkulationszinssätze  $[i^0, i^1] = [0,02, 0,06]$  und für die Menge alternativer maximaler Projektdauern  $\{\bar{d}^0, \dots, \bar{d}^1\} = \{6, 7, 8\}$  fest. Abbildung 14 zeigt für die Teilmenge  $[0,02, 0,06] \times [6, 8]$  des Definitionsbereichs der Kapitalwertfunktion die Höhenlinien (die Funktionswerte fallen hierbei in Richtung zunehmender Grausättigung).

$C_0^*$  ist auf  $[0,02, 0,06] \times [6, 8]$  monoton wachsend in  $i$ , so daß für die drei alternativen Projektdauern jeweils nur die Funktionswerte für  $i = 0,02$  und  $i = 0,06$  bestimmt werden müssen. In Tabelle 1 sind neben diesen Funktionswerten auch die Bewertungen der drei maximalen Projektdauern  $\bar{d}$  gemäß Hurwicz-Regel mit den Optimismusparametern  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 0,5$  und  $\lambda = 1$  angegeben, wobei die beste Bewertung jeweils eingerahmt ist. Das Beispiel illustriert, daß die Wahl der besten maximalen Projektdauer im allgemeinen vom gewählten Optimismusparameter  $\lambda$  abhängt und im Unterschied zum Fall des planungsabhängigen Projektendes eine maximale Projektdauer  $\bar{d} < \bar{d}^1$  die optimale Entscheidung liefern kann. Insbesondere ist es für  $\lambda < 1$  möglich, daß eine Projektdauer  $\bar{d}$  mit  $\bar{d}^0 < \bar{d} < \bar{d}^1$  optimal ist.

Abb. 14: Höhenlinien der Kapitalwertfunktion  $C_0^*$ 

 Tab. 1: Funktionswerte  $C_0^*(i, \bar{d})$  und Bewertungen  $\rho(\bar{d})$  gemäß Hurwicz-Regel

$C_0^*(i, \bar{d})$	$\bar{d} = 6$	$\bar{d} = 7$	$\bar{d} = 8$
$i = 0,02$	1,1653	1,1597	1,1427
$i = 0,06$	-0,2641	-0,2112	-0,1993
$\rho(\bar{d})$	$\bar{d} = 6$	$\bar{d} = 7$	$\bar{d} = 8$
$\lambda = 0$	-0,2641	-0,2112	-0,1993
$\lambda = 0,5$	0,4506	0,4743	0,4717
$\lambda = 1$	1,1653	1,1597	1,1427

## E. Anmerkungen

1. Zu Investitionen mit Projektcharakter vgl. Kolisch (1997).
2. Im folgenden nehmen wir stets an, daß Auszahlungen und Ausgaben sowie Einzahlungen und Einnahmen identisch sind, so daß wir beide Begriffspaare bedeutungsgleich verwenden.
3. Vgl. Elmaghraby (1990), Altrogge (1996a, S. 215 f.) und Kolisch (1997).
4. Myers (1977) verwendet für diese Wahl- bzw. Handlungsalternativen aufgrund ihres optionsähnlichen Charakters den Begriff Realoption (*real option*).
5. Zur Diskussion über die dem vollkommenen und unbeschränkten Kapitalmarkt zugrundeliegenden Vereinfachungen siehe Hax (1993, S. 10), Kruschwitz (1998, S. 51 f.) und Schierenbeck (1999, S. 351 f.).
6. Eine ausführliche Darstellung des zugrundeliegenden Separationstheorems von Fisher findet man in Eisenführ (1998, S. 11 ff.) und Kruschwitz (1999, S. 23 ff.). Für die Anwendbarkeit dieses Theorems muß nicht notwendigerweise ein vollkommener Kapitalmarkt vorliegen, es genügt beispielsweise, daß der Investor zur Finanzierung der Investition hinreichend eigene Mittel besitzt, siehe Eisenführ (1998, S. 13).
7. Eine umfassende Darstellung statischer und dynamischer Wirtschaftlichkeitskriterien findet sich in Hax (1993, S. 33 ff.), Altrogge (1996b, S. 243 ff.), Kruschwitz (1998, S. 25 ff.) sowie Domschke und Scholl (2000, S. 238 ff.).
8. Zum Annahme- bzw. Auswahlproblem vgl. Hax (1993, S. 33 ff.) und Kruschwitz (1999, S. 82 ff.).
9. Für eine ausführliche Diskussion der dynamischen Kriterien Kapitalwert, Endwert und Annuität verweisen wir auf Hax (1993, S. 16 ff.), Kruschwitz (1998, S. 40 ff.) und Betge (2000, S. 27 ff.).
10. Verfahren zur Bestimmung des Kapitalwerts von Projekten unter Berücksichtigung von allgemeinen Zeitbeziehungen finden sich bei Kamburowski (1990), Neumann und Zimmermann (2000) und Schwindt und Zimmermann (2001).
11. Zur Problematik bei der Bestimmung des Kalkulationszinsfußes siehe Wöhe (1993, S. 809 f.) und Perridon und Steiner (1999, S. 86 ff.). In Kruschwitz (1998, S. 335 ff.) werden verschiedene Zinssätze vorgeschlagen (z. B. Kassa-, Termin- und Effektivzinssätze), an denen sich die (näherungsweise) Bestimmung des Kalkulationszinsfußes bei Annahme eines vollkommenen und unbeschränkten Kapitalmarkts orientieren kann.
12. Verfahren der parametrischen Optimierung stellen den Zusammenhang zwischen optimalen Zielfunktionswerten und bestimmten Ausgangsdaten (den Parametern) eines Optimierungsproblems her (siehe Neumann und Morlock, 1993, S. 128 ff.).
13. Zur Strukturplanung von Projekten siehe Burghardt (1997, S. 126 ff.). Aufgaben und Instrumente des Projektmanagements sind in Drexl et al. (1998) beschrieben.
14. In §3 Abs. 2 der Makler- und Bauträgerverordnung werden für 13 Teilprojekte prozentuale Teilbeträge der Vertragssumme festgelegt (vgl. Marcks, 1998, S. 43).

15. Für eine Einführung in Banachräume und eine Darstellung des Banachschen Fixpunktsatzes vgl. Heuser (1998, S. 30 ff.).
16. Für die zur Darstellung des Verfahrens benötigten Grundbegriffe aus der Netzplantechnik verweisen wir auf Neumann und Morlock (1993, S. 176 ff.), Moder et al. (1995, S. 21 ff.) oder Neumann und Schwindt (1997).
17. Verfahren des steilsten Anstiegs für Probleme mit linearen Nebenbedingungen sind beispielsweise in Horst (1979, S. 217 ff.) beschrieben.
18. Vgl. beispielsweise Wöhe (1993, S. 809 f.).
19. Ein Verfahren zur Bestimmung aller internen Zinsfüße einer Zahlungsreihe findet man bei Zurmühl (1965, S. 56 f.).
20. Vgl. beispielsweise Saliger (1998, S. 82 f.).
21. Für die Wahl eines geeigneten Optimismusparameters  $\lambda$  durch den Investor auf der Grundlage der Bewertung einer speziellen Ungewißheitssituation sei auf Bamberg und Coenenberg (2000, S. 132 f.) verwiesen.
22. Da in jedem Gültigkeitsbereich auch die partielle Ableitung  $\partial C_0^*(i, \bar{d})/\partial i$  dem Kapitalwert  $C_0$  einer Zahlungsreihe entspricht, kann zur Bestimmung der Nullstellen von  $\partial C_0^*(i, \bar{d})/\partial i$  wieder das Verfahren von Zurmühl verwendet werden.
23. Der Verlauf der Funktion  $\omega$  für einen individuellen Investor kann ähnlich wie der Optimismusparameter  $\lambda$  durch die Evaluierung spezieller Ungewißheitssituationen empirisch ermittelt werden (vgl. Bamberg und Coenenberg, 2000, S. 136 f.).

## Literatur

- [1] Altrogge, G. (1996a) *Netzplantechnik*, Oldenbourg, München, 3. Auflage
- [2] Altrogge, G. (1996b) *Investition und Finanzierung*, Oldenbourg, München, 4. Auflage
- [3] Bamberg, G. und Coenenberg, A.G. (2000) *Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre*, Vahlen, München, 10. Auflage
- [4] Betge, P. (2000) *Investitionsplanung: Methoden — Modelle — Anwendungen*, Vahlen, München, 4. Auflage
- [5] Burghardt, M. (1997) *Projektmanagement: Leitfaden für die Planung, Überwachung und Steuerung von Entwicklungsprojekten*, Publicis MCD, Erlangen, 4. Auflage
- [6] Buttler, G. (1979) Finanzwirtschaftliche Anwendungsmöglichkeiten der Netzplantechnik, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 40, 183–202
- [7] Daynand, N. und Padman, R. (1997) On modelling payments in projects, *Journal of the Operational Research Society* 48, 906–918
- [8] Domschke, W. und Scholl, A. (2000) *Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre*, Springer, Berlin
- [9] Drexler, A., Kolisch, R. und Sprecher A. (1998) Koordination und Integration im Projektmanagement, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 68, 275–296



- [10] Eisenführ, F. (1998) *Investitionsrechnung*, G. Mainz, Aachen, 12. Auflage
- [11] Elmaghraby, S.E. (1990) Project bidding under deterministic and probabilistic activity durations, *European Journal of Operational Research* 49, 14–34
- [12] Fischer, E.O. (1999) Die relevanten Kalkulationszinsfüße in der Investitionsplanung, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 69, 777–801
- [13] Fischer, T.R., Hahnenstein, L. und Heitzer, B. (1999) Kapitalmarkttheoretische Ansätze zur Berücksichtigung von Handlungsspielräumen in der Unternehmensbewertung, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 69, 1207–1232
- [14] Hax, H. (1993) *Investitionstheorie*, Physica, Heidelberg, 5. Auflage
- [15] Herroelen, W.S., Van Dommelen, P. und Demeulemeester, E.L. (1997) Project network models with discounted cash flows: A guided tour through recent developments, *European Journal of Operational Research* 100, 97–121
- [16] Heuser, H. (1998) *Lehrbuch der Analysis Teil 2*, Teubner, Stuttgart, 10. Auflage
- [17] Horst, R. (1979) *Nichtlineare Optimierung*, Hanser, München
- [18] Kamburowski J. (1990) Maximizing the project net present value in activity networks under generalized precedence relations, *Proceedings of 21st DSI Annual Meeting, San Diego*, 748–750
- [19] Kilka, M. (1995) *Realloptionen: Optionspreistheoretische Ansätze bei Investitionsentscheidungen unter Unsicherheit*, Fritz Knapp, Frankfurt a. M.
- [20] Kolisch, R. (1997) Investitionsplanung in Netzwerken, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 67, 1057–1072
- [21] Kolisch, R. und Padman, R. (2001) An integrated survey of deterministic project scheduling, *Omega — The International Journal of Management Science* 29, 249–272
- [22] Kruschwitz, L. (1998) *Investitionsrechnung*, Oldenbourg, München, 7. Auflage
- [23] Kruschwitz, L. (1999) *Finanzierung und Investition*, Oldenbourg, München, 2. Auflage
- [24] Marcks, P. (1998) *MaBV — Makler- und Bauträgerverordnung*, C.H. Beck, München, 6. Auflage
- [25] Moder, J.J., Phillips, C.R. und Davis, E.W. (1995) *Project Management with CPM, PERT, and Precedence Diagramming*, Van Nostrand Reinhold, New York, 3. Auflage
- [26] Myers, S.C. (1977) Determinants of corporate borrowing, *Journal of Financial Economics* 5, 147–176
- [27] Neumann, K. und Morlock, M. (1993) *Operations Research*, Hanser, München
- [28] Neumann, K. und Schwindt, C. (1997) Activity-on-node networks with minimal and maximal time lags and their application to make-to-order production, *OR Spektrum* 19, 205–217

- [29] Neumann, K. und Zimmermann, J. (2000) Procedures for resource levelling and net present value problems in project scheduling with general temporal and resource constraints, *European Journal of Operational Research* 127, 211–229
- [30] Neumann, K., Nübel, H. und Schwindt, C. (2000) Active and stable project scheduling, *Mathematical Methods of Operations Research* 52, 441–466
- [31] Perridon, L. und Steiner, M. (1999) *Finanzwirtschaft der Unternehmung*, Vahlen, München, 10. Auflage
- [32] Saliger, E. (1998) *Betriebswirtschaftliche Entscheidungstheorie*, Oldenbourg, München, 4. Auflage
- [33] Schierenbeck, H. (1999) *Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre*, Oldenbourg, München, 14. Auflage
- [34] Schwindt, C. und Zimmermann, J. (2001) A steepest ascent approach to maximizing the net present value of projects, *Mathematical Methods of Operations Research* 53, 435–450
- [35] Spickhoff, F. (1966) Anwendungen der Netzplantechnik bei der langfristigen Finanzplanung, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 36, 592–604
- [36] Trigeorgis, L. (1996) *Real Options*, MIT Press, Cambridge, MA
- [37] van der Boom A.H. und van der Grift F. (1999) Periodischer Zins und kontinuierlicher Zins, periodische Analyse und kontinuierliche Analyse, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 69, 729–744
- [38] Wöhe, G. (1993) *Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre*, Vahlen, München, 18. Auflage
- [39] Zurmühl, R. (1965) *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*, Springer, Berlin, 5. Auflage

## Zusammenfassung

Die Bewertung von Investitionsprojekten auf Grundlage des optimalen Projektkapitalwerts setzt die Kenntnis über den anzuwendenden Kalkulationszins und die maximale Projektdauer voraus. In der Literatur besteht jedoch Einigkeit darüber, daß es oftmals nicht möglich ist, den Kalkulationszinsfuß mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen. Ferner wird die maximale Dauer eines Investitionsprojekts in der Regel erst in Verhandlungen festgelegt. In dieser Arbeit entwickeln wir ein Verfahren zur Bestimmung des Kapitalwerts von Investitionsprojekten als Funktion des Kalkulationszinsfußes und der maximalen Projektdauer. Mit Hilfe dieser Funktion ist es möglich, Investitionsprojekte bei ungewissem Kalkulationszinsfuß und variabler maximaler Projektdauer zu beurteilen.

## **Summary**

The assessment of investment projects by the net present value method presupposes that the discount rate and the project deadline are known. In literature, however, it is commonly accepted that generally the discount rate cannot be determined with sufficient accuracy. Moreover, the project deadline is generally subject to negotiations. In this paper, we develop a procedure for computing the project net present value as a function of the discount rate and the project deadline. On the basis of this function, investment projects with uncertain discount rate and variable project deadline can be evaluated.